

① معادله $x - \sqrt{x} = \sqrt{x - \sqrt{x} + 30}$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با تغییر متغیر $t = x - \sqrt{x}$ داریم:

$$t = \sqrt{t+30} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 = t+30 \Rightarrow t^2 - t - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (t-6)(t+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \text{ ق ق} \\ t = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 12x + 36 = x$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \text{ ق ق} \\ x = 4 \text{ غ ق} \end{cases}$$

② از معادله $\sqrt{4a^2 - 4a - 7} = a$ ، حاصل $\frac{a-2}{a-1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\sqrt{4a^2 - 4a - 7} = a \xrightarrow{\text{توان دو}} 4a^2 - 4a - 7 = a^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 4a - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$a = -1$ در معادله اولیه صدق نمی‌کند و $a = \frac{7}{3}$ تنها جواب معادله است:

$$\frac{a-2}{a-1} = \frac{\frac{7}{3}-2}{\frac{7}{3}-1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

۳) اگر ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۶ درصدی داشته باشیم، برای تبدیل آن به محلول آب نمک ۱۰ درصدی باید a کیلوگرم از نمک نوع اول و b کیلوگرم از نمک نوع دوم اضافه و ۱۷ کیلوگرم از آب آن را تبخیر کنیم. کدام گزینه می‌تواند اندازه‌های a و b را درست نشان دهد؟ (این محلول آب‌نمک، از دو نوع نمک تشکیل شده است.)

$$\begin{array}{llll} \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} & (۴) & \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases} & (۳) \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases} & (۲) & \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} & (۱) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

$$(kg) ۱۲ = ۲۰۰ \times \frac{۶}{۱۰۰} : \text{وزن نمک موجود در محلول}$$

$$\frac{۱۲+a+b}{۲۰۰+a+b-۱۷} = \frac{۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱۲+a+b}{۱۸۳+a+b} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$۱۲۰ + ۱۰a + ۱۰b = ۱۸۳ + a + b \Rightarrow ۹a + ۹b = ۶۳ \Rightarrow a + b = ۷$$

مجموع وزن نمک a و b باید ۷ کیلوگرم باشد. بنابراین فقط گزینه اول می‌تواند صحیح باشد.

۴) اگر مجموع جواب‌های معادله $\frac{۵}{x^2+3x-4} - \frac{۳}{x^2+5x+4} = \frac{m}{x}$ برابر ۸- باشد، m کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -\frac{۱}{۱۶} & (۱) & -\frac{۱}{۴} & (۲) \\ \frac{۱}{۴} & (۳) & \frac{۱}{۱۶} & (۴) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \frac{۵}{(x+4)(x-1)} - \frac{۳}{(x+4)(x+1)} &= \frac{m}{x} \\ \Rightarrow \frac{۵(x+1) - ۳(x-1)}{(x+4)(x-1)(x+1)} &= \frac{m}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{۲x+۸}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x} \Rightarrow \frac{۲(x+4)}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x} \Rightarrow ۲x = m(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow mx^2 - ۲x - m = ۰$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-۲}{m} = -۸ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۴}$$

۵) ماشین A کاری را در ۲۰ دقیقه و ماشین B همان کار را در ۴۰ دقیقه انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین با هم شروع به کار کنند و بعد از ۵ دقیقه ماشین A خراب شود، ماشین B در چند دقیقه دیگر کار را تمام می‌کند؟

۳۵ (۲)

۳۰ (۱)

۲۰ (۴)

۲۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ماشین A در هر دقیقه $\frac{1}{20}$ کار و ماشین B، $\frac{1}{40}$ کار را انجام می‌دهد. اگر این دو همزمان کار کنند، $\frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{3}{40}$ کار را در هر دقیقه انجام می‌دهند، پس در ۵ دقیقه $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ کار را انجام می‌دهند. حال بعد از خراب شدن ماشین A، ماشین B به تنهایی باید $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ کار را انجام دهد. مدت زمان این کار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta t = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{40}} = \frac{40 \times 5}{8} = 25 \text{ دقیقه}$$

۶) اگر $x = 2$ جواب معادله $\frac{x+8}{a-1} - \frac{x+4}{a+1} = \frac{x+2}{a-3}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین $x = 2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{10}{a-1} - \frac{6}{a+1} &= \frac{4}{a-3} \Rightarrow \frac{5}{a-1} - \frac{3}{a+1} = \frac{2}{a-3} \\ \Rightarrow \frac{2a+8}{a^2-1} &= \frac{2}{a-3} \Rightarrow \frac{a+4}{a^2-1} = \frac{1}{a-3} \Rightarrow a^2-1 = a^2+a-12 \Rightarrow a = 11 \end{aligned}$$

۷) ۳۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۵ درصد جرمی موجود است. برای آنکه غلظت را به ۸ درصد افزایش دهیم، چهار کیلوگرم نمک اضافه می‌کنیم و n کیلوگرم آب تبخیر می‌کنیم. مقدار n چند کیلوگرم است؟

۵۴/۵ (۴)

۵۷/۵ (۳)

۶۳/۵ (۲)

۶۶/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

نمک	وزن کل	
۱۵	۳۰۰	محلول اولیه
۱۹	$۳۰۴ - n$	محلول ثانویه

$$\Rightarrow \frac{19}{304-n} = \frac{8}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{19}{304-n} = \frac{2}{25} \Rightarrow 608 - 2n = 475 \Rightarrow 2n = 133 \Rightarrow n = 66.5 \text{ kg}$$

۸) معادله $\sqrt{x^3 + x - 10} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

جمع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک تک آن‌ها صفر باشند.

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

فقط $x = 2$ ریشه $\sqrt{x^3 + x - 10}$ می‌باشد و آن را صفر می‌کند. پس یک جواب دارد.

⑨ معادله $\sqrt{ax+1} - \sqrt{2x} = 1$ به ازای چه مقادیری از a ، دارای دو جواب حقیقی است؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $\{2\}$ (۴) $(-\infty, -2]$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\sqrt{ax+1} - \sqrt{2x} = 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{2x} = \sqrt{ax+1}$$

توان ۲
 $\rightarrow 2x + 1 + 2\sqrt{2x} = ax + 1$

توان ۲
 $\Rightarrow (a-2)x = 2\sqrt{2x} \rightarrow (a-2)^2 x^2 = 4x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{(a-2)^2} \end{cases}$$

جایگذاری
 $x = \frac{4}{(a-2)^2} \rightarrow \sqrt{\frac{4a}{(a-2)^2} + 1} - \sqrt{\frac{16}{(a-2)^2}} = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(a+2)^2}{(a-2)^2}} - \sqrt{\frac{16}{(a-2)^2}} = 1 \Rightarrow \left| \frac{a+2}{a-2} \right| - \left| \frac{4}{a-2} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|a+2|}{|a-2|} - \frac{4}{|a-2|} = 1 \Rightarrow |a-2| = |a+2| - 4$$

$$\Rightarrow |a-2| - |a+2| = -4$$

که سه حالت باید بررسی شود:

۱) $a \geq 2 \Rightarrow a-2-(a+2) = -4 \quad \checkmark$

۲) $-2 < a < 2 \Rightarrow 2-a-(a+2) = -4 \Rightarrow -2a = -4$

$\Rightarrow a = 2$ غ ق

$a \leq -2 \Rightarrow 2-a-(-a-2) = -4 \Rightarrow 4 = -4$ غ ق

به ازای $a = 2$ ، مقدار $x = \frac{4}{(a-2)^2}$ تعریف نشده خواهد بود، پس $a > 2$ صحیح است.

۱۰) اگر دو نقاش با هم کار کنند، خانه‌ای را در ۶ روز رنگ می‌کنند و اگر هر کدام به تنهایی کار کنند کارگر اول کار را ۵ روز زودتر از کارگر دوم انجام می‌دهد. کارگر دوم به تنهایی کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

فرض کنیم کارگر دوم به تنهایی کار را در x روز تمام می‌کند. پس در ۱ روز به اندازه $\frac{1}{x}$ از کار را انجام می‌دهد. همچنین کارگر اول به تنهایی در $(x - 5)$ روز کار را تمام می‌کند، پس در ۱ روز به اندازه $\frac{1}{x-5}$ از کار را انجام می‌دهد. چون هر دو با هم کار را ۶ روزه تمام می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x-5+x}{x^2-5x} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-5}{x^2-5x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x^2-5x = 12x-30$$

$$\Rightarrow x^2-17x+30=0 \Rightarrow (x-2)(x-15)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{غ ق ق} \\ x=15 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$x=2$ غیرقابل قبول است، چون یک کارگر به تنهایی نمی‌تواند سریع‌تر از زمانی که دو نفره کار می‌کنند کار را تمام کند.

۱۱) حاصل ضرب جواب‌های معادله $\sqrt{6x^2 - 12x + 3} - \sqrt{2x^2 - 4x + 2} = 1$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با فرض $2x^2 - 4x + 2 = t$ ، داریم:

$$6x^2 - 12x + 3 = 3(2x^2 - 4x + 2) - 3 = 3t - 3$$

معادله به شکل روبه‌رو درمی‌آید: $\sqrt{3t - 3} - \sqrt{t} = 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{3t - 3} &= \sqrt{t} + 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3t - 3 = t + 1 + 2\sqrt{t} \\ \Rightarrow 2t - 4 &= 2\sqrt{t} \xrightarrow{\div 2} t - 2 = \sqrt{t} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 - 4t + 4 = t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (t - 1)(t - 4) = 0 \quad \begin{cases} t = 1 \quad \boxed{\times} \\ t = 4 \quad \boxed{\checkmark} \end{cases}$$

فقط $t = 4$ در معادله صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 2 &= 4 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \\ \Rightarrow P &= \frac{c}{a} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

۱۲) اگر $2x - \sqrt{4x^2 - 4} = -3$ باشد، مقدار $x + \sqrt{x^2 - 1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) -3 (۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$2x - \sqrt{4(x^2 - 1)} = -3 \Rightarrow 2x - 2\sqrt{x^2 - 1} = -3$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = -\frac{3}{2} \quad (1)$$

با فرض (۲) $x + \sqrt{x^2 - 1} = a$ اگر طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 + 1 = -\frac{3}{2}a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

۱۳) اگر معادله $\frac{m-3}{x} = \frac{x-4}{x^2+3x}$ فاقد جواب حقیقی باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\frac{m-3}{x} = \frac{x-4}{x^2+3x} \Rightarrow mx^2 + 3mx - 3x^2 - 9x = x^2 - 4x$$

$$(m-4)x^2 + (3m-5)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق} \\ x = \frac{-3m+5}{m-4} \end{cases}$$

چون دامنه معادله گویا برابر $R - \{0, -3\}$ است و از طرفی دیگر چون معادله هیچ جوابی ندارد، $x = \frac{-3m+5}{m-4}$ باید برابر -3 یا $x = 0$ باشد:

$$\frac{-3m+5}{m-4} = -3 \Rightarrow -3m + 5 = -3m + 12 \quad \text{جواب ندارد.}$$

$$\frac{-3m+5}{m-4} = 0 \Rightarrow -3m + 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

هم‌چنین اگر $m - 4 = 0$ ، یعنی $m = 4$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

۱۴) کدام گزینه در مورد معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = x-4$ درست است؟

- ۱) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. ۲) فقط یک ریشه مثبت دارد.
۳) فقط یک ریشه منفی دارد. ۴) ریشه ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

با توجه به دامنه معادله، سه شرط زیر باید همزمان برقرار باشد:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases}$$

اشتراک این سه شرط، تهی است، پس معادله ریشه ندارد.

۱۵) احمد و رضا در یک لحظه از شهر تهران به طرف کرج حرکت می‌کنند. سرعت هر کدام از آنها ثابت است و فاصله بین دو شهر ۶۰ کیلومتر است. احمد هر ساعت ۴ کیلومتر کمتر از رضا می‌پیماید. رضا به شهر کرج رسیده و بلافاصله برمی‌گردد و احمد را در ۱۲ کیلومتری کرج ملاقات می‌کند، احمد با سرعت چند کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند؟

- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

توجه کنید که وقتی احمد و رضا به هم می‌رسند مدت زمان حرکت هر دو با هم مساوی است. از آنجا که احمد مسافتی برابر $60 - 12 = 48$ و رضا مسافتی برابر $60 + 12 = 72$ کیلومتر طی کرده است، پس زمان حرکت احمد $\frac{48}{v}$ و زمان حرکت رضا $\frac{72}{v+4}$ است که در آن v سرعت حرکت احمد است.

بنابراین:

$$t = \frac{72}{v+4} = \frac{48}{v} \Rightarrow v = 8$$

پس احمد با سرعت ۸ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند.

۱۶) به ازای کدام مقدار k ، یکی از ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-k}{x+1} = 1$ ، دو برابر معکوس ریشه دیگر است؟

۲ (۱)

-۲ (۲)

$-\frac{5}{2}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-k}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-2)(x-k)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + (k+2)x - 2k}{x^2 - x - 2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (k+4)x - 2k + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - (k+5)x + 2k - 3 = 0$$

یکی از ریشه‌های معادله بالا، ۲ برابر معکوس ریشه دیگر است، یعنی اگر یکی از ریشه‌ها α باشد، دیگری $\frac{2}{\alpha}$ است، پس حاصل ضرب آن‌ها برابر ۲ خواهد شد.

$$P = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow 2k - 3 = 2 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

به ازای $k = \frac{5}{2}$ معادله $x^2 - 7/5x + 2 = 0$ دو جواب قابل قبول دارد، پس $k = \frac{5}{2}$ قابل قبول است.

۱۷) حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{1}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+2} = \frac{7}{x^2+6}$ ، کدام است؟

(۱) -۶

(۲) -۱۶

(۳) -۴

(۴) -۲۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

در معادله داده شده به کمک تغییر متغیر $x^2 + 1 = t$ فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{t} + \frac{3}{t+1} = \frac{7}{t+5} \xrightarrow[\text{ک.م.م. مخرج ها}]{\times t(t+1)(t+5)} (t+1)(t+5) + 3t(t+5) = 7t(t+1)$$

$$\Rightarrow t^2 + 6t + 5 + 3t^2 + 15t = 7t^2 + 7t$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 14t - 5 = 0$$

$$\Delta = 256 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{14+16}{6} = 5 \\ t = \frac{14-16}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{ق.ق} \\ x^2 + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب جواب‌های } x = -4$$

۱۸) خودرویی مسافت ۱۲۰ کیلومتری بین دو شهر را به صورت رفت و برگشت طی کرده است، به طوری که سرعت متوسط برگشت ۲۰ کیلومتر بر ساعت از سرعت متوسط رفت بیشتر و زمان برگشت ۱۸ دقیقه از زمان رفت کمتر بوده است. سرعت متوسط رفت بر حسب کیلومتر بر ساعت کدام است؟

۸۵ (۴)

۶۰ (۳)

۸۰ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

سرعت متوسط رفت را v در نظر می‌گیریم، به تبع آن سرعت متوسط برگشت $v+20$ است. همچنین زمان رفت و زمان برگشت بر حسب ساعت به ترتیب برابر $\frac{120}{v}$ و $\frac{120}{v+20}$ است. زمان برگشت از زمان رفت ۱۸ دقیقه کمتر بوده است، یعنی:

$$\frac{120}{v} - \frac{120}{v+20} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 120 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+20} \right) = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 40 \left(\frac{v+20-v}{v^2+20v} \right) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow v^2 + 20v - 8000 = (v+100)(v-80) = 0$$

$$\xrightarrow{v>0} v = 80 \text{ km/h}$$

۱۹) پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

۱۵ (۴)

۱۳/۵ (۳)

۱۲/۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

اگر سرعت پرنده در هوای آرام v باشد، سرعت در مسیر رفت $v+5$ و در مسیر برگشت $v-5$ خواهد بود. دقت کنید واحد زمان باید برحسب ساعت و واحد طول برحسب کیلومتر باشد.

$$t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow \begin{cases} t_{\text{رفت}} = \frac{1}{v+5} \\ t_{\text{برگشت}} = \frac{1}{v-5} \end{cases}$$

$$t_{\text{رفت}} + t_{\text{برگشت}} = 9(\text{min}) = \frac{9}{60}(\text{h}) = \frac{3}{20}(\text{h})$$

$$\frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{3}{20}$$

$$\xrightarrow{\times 20(v-5)(v+5)} 20(v-5) + 20(v+5)$$

$$= 3(v-5)(v+5)$$

$$\Rightarrow 20v - 100 + 20v + 100 = 3v^2 - 75 \Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0$$

$$\Delta = 1600 + 900 = 2500 \Rightarrow v = \frac{40 \pm 50}{6} \Rightarrow \begin{cases} v = 15 \text{ ق ق} \\ v = -\frac{10}{6} \text{ غ ق} \end{cases}$$

۲۰) فرض کنید x_1 و x_2 جوابهای معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۲ صفر

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

روش اول: با ضرب کردن طرفین معادله در $\sqrt[3]{x^2}$ و اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) &= 2\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{x^2} \\ \Rightarrow (\sqrt[3]{x^2} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + 1) &= 2\sqrt[3]{x^2} \\ \Rightarrow (\sqrt[3]{x^2})^3 - 1^3 &= 2\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0\end{aligned}$$

مقدار $x_1 + x_2$ برابر است با:

$$x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

روش دوم: با در نظر گرفتن $\sqrt[3]{x} = t$ داریم:

$$\begin{aligned}(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1)(t^2 - 1) &= 2t \\ \Rightarrow t^4 + 1 + t^2 - t^2 - \frac{1}{t^2} - 1 &= 2t \xrightarrow{\times t^2} t^6 - 1 + t^4 - t^2 - 1 = 2t^3 \\ t^6 - 2t^3 - 1 &= 0 \Rightarrow (t^3)^2 - 2t^3 - 1 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} t_1^3 = (\sqrt[3]{x_1})^3 = x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ t_2^3 = (\sqrt[3]{x_2})^3 = x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}\end{aligned}$$